MAT01354 - E1 - Cálculo e Geometria Analítica II - 2023/1

Prof. Julio Lombaldo - **Prova 2.**

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Total

Nome: ______________________________ Cartão: ____________

Q1) (2,0 pontos) Considere a seguinte integral dupla

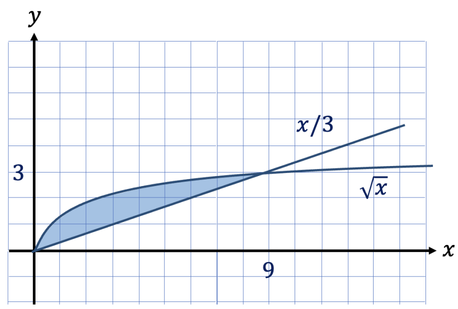
$$\int_0^9 \int_{x/3}^{\sqrt{x}} xy \ \, dydx$$

a) Represente a mesma integral na ordem $dxdy$.

b) Calcule a integral dada ou a integral que você obteve no item anterior.

Solução:

a) Conforme podemos ver pelo gráfico



teremos que

$$0 \leq y \leq 3$$

e as funções inversas são dadas por $y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$ e $y = x/3 \Rightarrow x = 3y$, logo temos que

$$y^2 \leq x \leq 3y$$

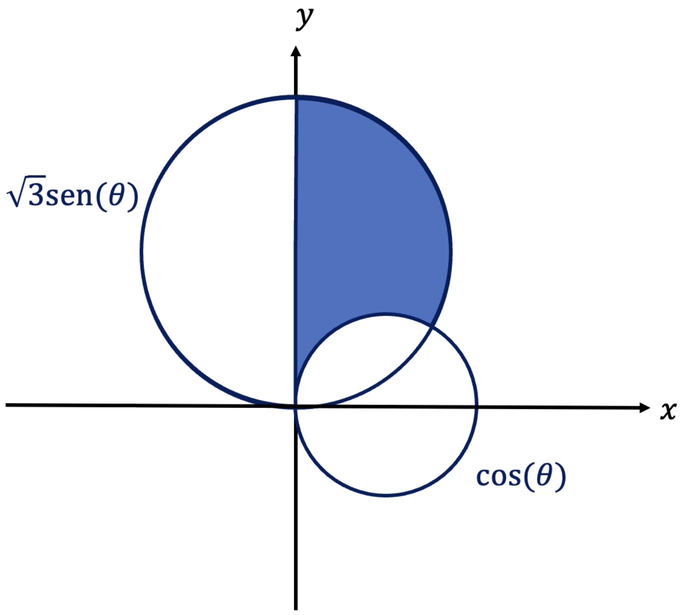
Sendo assim, a integral fica

$$\int_0^3 \int_{y^2}^{3y} xy \ \, dxdy$$

b) Usando a integral dada no enunciado para resolver, teremos que

$$\begin{aligned}
\int_0^9 \int_{x/3}^{\sqrt{x}} xy \ \, dydx = \int_0^9 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{x/3}^{\sqrt{x}} \ dx \quad &= \int_0^9 \left[\frac{x(\sqrt{x}))^2}{2} - \frac{x(x/3))^2}{2}\right] \ dx \\
&= \int_0^9 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{18}\right] \ dx \\
&= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{72}\right]_0^9 \\
&= \left[\frac{9^3}{6} - \frac{9^4}{72}\right]
\end{aligned}$$

Q2) (2,0 pontos) Considere a seguinte área hachurada entre as funções $r = \sqrt{3}sen(\theta)$ e $r = cos(\theta)$. Escreva a integral que representa a área hachurada (sem calcular).



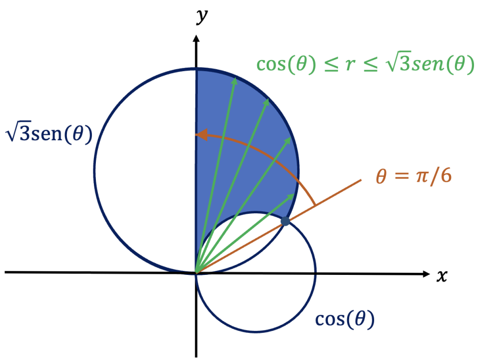
Solução:

Para determinar a variação em coordenadas polares, é preciso descobrir a variação de θ que ocorre a partir da interseção das curvas $\sqrt{3}sen(\theta)$ e $cos(\theta)$.

Para isso igualamos estas curvas:

$$\sqrt{3}sen(\theta) = cos(\theta) \Rightarrow \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow tan(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo $\theta = \pi/6$ conforme podemos ver pelo gráfico



Assim, teremos que

$$cos(\theta) \leq r \leq \sqrt{3}sen(\theta)$$
$$\pi/6 \leq \theta \leq /2$$

e portanto a integral que calcula a área é dada por

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{cos(\theta)}^{\sqrt{3}sen(\theta)} r dr d\theta$$

Q3) (2,0 pontos) Considere o sólido G limitado por $z = y$, pelo plano xy e por $y = 1 - x^2$. Sabendo que o volume de um sólido é dado por

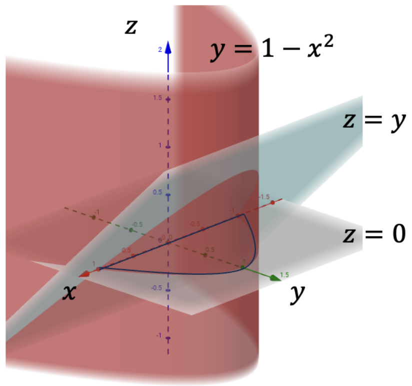
$$V = \iiint\limits_G dV$$

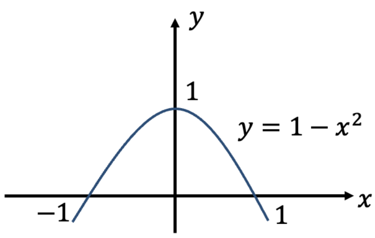
a) Escreva a integral tripla em coordenadas cartesianas que representa o volume do sólido G.

b) Calcule esse volume usando a integral do item anterior.

Solução:

a) Para determinar a integral tripla, precisamos entender o solido. Que é formado conforme o desenho abaixo





Podemos notar que a direita encontra-se a região no plano referente a R, que é definida como região do tipo 1 sendo descrita por:

$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x^2 \end{aligned}$$

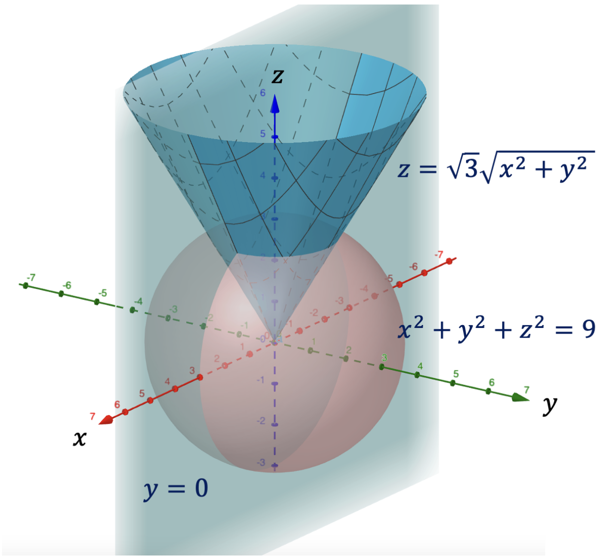
e z varia do plano $xy(z = 0)$ até o plano $z = y$. Portanto $0 \leq z \leq y$. Portanto a integral tripa é dada por:

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \int_{0}^{y} 1 \ \ dzdydx$$

b) Resolvendo essa integral, teremos que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \int_{0}^{y} 1 \ \ dzdydx = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} [z]_0^y \ \ dydx &= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} y \ \ dydx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x^2} \ \ dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[\frac{(1-x^2)^2}{2}\right] \ \ dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 1 - 2x^2 + x^4 \ \ dx \\
&= \frac{1}{2} \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

Q4) (2,0 pontos) Considere o sólido G formado entre as superfícies abaixo:



Calcule o volume do solido formado entre a esfera, o cone e o plano $xz(y = 0)$.

Solução:

Para determinar o volume, precisamos descobrir as variações de θ, ϕ e ρ.

Como a esfera é de raio 3, temos que $0 \leq \rho \leq 3$. O plano $y = 0$ corta o cone pela metade, fazendo com que $0 \leq \theta\pi$

Para a variação em ϕ precisamos descobrir o angulo formado pelo cone. Usando coordenadas esféricas, o cone fica

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}\\
\rho cos(\phi) &= \sqrt{3}\sqrt{\rho^2 sen^2(\phi)cos^2(\theta)+\rho^2 sen^2(\phi)sen^2(\theta)}\\
\rho cos(\phi) &= \sqrt{3}\sqrt{\rho^2 sen^2(\phi)(cos^2(\theta)+sen^2(\theta))}\\
\rho cos(\phi) &= \sqrt{3}\sqrt{\rho^2 sen^2(\phi)}\\
\rho cos(\phi) &= \sqrt{3}\rho sen(\phi)\\
cos(\phi) &= \sqrt{3} sen(\phi)\\
\frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{sen(\phi)}{cos(\phi)} = tan(\phi)
\end{aligned}$$

Logo $\phi = \pi/6$, sendo a variação dada por $0 \leq \phi \leq \pi/6$. Então a integral que calcula o volume é dada por

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^3 1\ \ \rho^2 sen(\phi) d\rho d\phi d\theta &= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi/6}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^3 sen(\phi)\ \ d\phi d\theta\\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi/6} 9sen(\phi)\ \ d\phi d\theta\\
&= 9\int_0^{\pi} [cos(\phi)]_0^{\pi/6}\ \ d\theta\\
&= 9\int_0^{\pi} [-cos(\pi/6)+cos(0)]\ \ d\theta\\
&= 9\int_0^{\pi}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right]\ \ d\theta\\
&= 9\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\int_0^{\pi} d\theta\\
&= 9\pi\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]
\end{aligned}$$

Q5) (2,0 pontos) Considere o campo vetorial dado por:

$$\vec{F}(x,y) = \langle e^{2x} sen(2y), e^{2x} cos(2y) \rangle$$

a) Verifique se esse campo é conservativo.

b) Se for conservativo, encontre $\phi(x,y)$.

c) Calcule o trabalho $W = \int_C \vec{F}.d\vec{r}$ por um caminho arbitrário de $(0,\pi/2)$ até $(1,\pi/2)$

Solução:

a) Para determinar se o campo é ou não conservativo, precisamos verificar se $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$. Onde $\vec{F} = \langle f(x,y), g(x,y) \rangle$. Logo temos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x} cos(2y).2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = e^{2x} 2.cos(2y)$$

Logo o campo é copnservativo.

b) Para determinar a função potencial $\phi(x,y)$ vamos integrar $f(x,y)$ em x uma vez que $f(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}$. Assim temos que

$$\phi(x,y) = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \int f(x,y) dx = \frac{e^{2x}}{2} sen(2y) + k(y)$$

Agora derivamos $\phi(x,y)$ em relação a y e igualamos a $g(x,y)$ tendo então

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{e^{2x}}{2} cos(2y).2 + k'(y) = e^{2x} cos(2y) + k'(y)$$

Igualando a $g(x,y)$ temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = e^{2x} cos(2y) + k'(y) = e^{2x} cos(2y) = g(x,y)$$

e portanto $k'(y) = 0$ e logo $k(y) = C$. Sendo assim a função $\phi(x,y)$ dada por

$$\phi(x,y) = \frac{e^{2x}}{2} sen(2y) + C$$

c) O trabalho será dado por

$$\begin{aligned}
W &= \phi(1,\pi/2) - \phi(0,\pi/2) \\
&= \left(\frac{e^{2.1}}{2} sen(2\pi/2) + C \right) - \left(\frac{e^{2.0}}{2} sen(2\pi/2) + C \right) \\
&= \left(\frac{e^{2}}{2}.0 + C \right) - \left(\frac{1}{2}.0 + C \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Formulário:

Ângulos notáveis:

θ	30^*	45^*	60^*
$\mathrm{sen}(\theta)$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos(\theta)$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
$\tan(\theta)$	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

Coordenadas Polares:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ tg(\theta) &= y/x \\ x &= rcos(\theta) \\ y &= rsen(\theta) \end{aligned}$$

$$dV = dzrdrd\theta \quad \text{(Cilíndricas)}$$

Coordenadas Esféricas:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ tg(\theta) &= y/x \\ cos(\phi) &= z/\rho \\ r &= \rho sen(\phi) \\ x &= \rho sen(\phi)cos(\theta) \\ y &= \rho sen(\phi)sen(\theta) \\ z &= \rho cos(\phi) \end{aligned}$$

$$dV = \rho^2 sen(\phi) d\rho d\phi d\theta \quad \text{(Esféricas)}$$

Integrais de Linha e de Campos Vetoriais:

$$\int_C f.ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)). \parallel r'(t) \parallel dt$$

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C f(x,y)dx + \int_C g(x,y)dy$$

Campos conservativos:

$$\vec{F} = \nabla\phi$$

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1)$$